Algebra III - Abstraktna algebra, 24.01.2017.

1. (a) Naj bo X neprazna množica. Potenčno množico $\mathcal{P}(X)$ opremimo z operacijo $\backslash$ (razlika množic)

$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{B} := \{x \,|\, x \in \mathcal{A} \text{ in } x \notin \mathcal{B}\}, \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{P}(X).$$

Ali je množica $\mathcal{P}(X)$ zaprta glede na operacijo $\backslash$? Ali je operacija $\backslash$ asociativna na množici $\mathcal{P}(X)$? Odgovor utemelji! (50%)

(b) Naj bo $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 8 & 4 & 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Izračunaj π^{-1}, π^{2017} in $\pi^{-2}\pi^4$. Napiši $\pi^{-2}\pi^4$ kot produkt 2-ciklov (torej kot produkt transpozicij). (50%)

Re.

(a) je zaprta, ni asocijativna. Npr če je $\mathcal{A} := \{a\} \subset \mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{B} := \emptyset \subset \mathcal{P}(X)$ potem $(\mathcal{A}\backslash\mathcal{B})\backslash\mathcal{A} = \emptyset$, $\mathcal{A}\backslash(\mathcal{B}\backslash\mathcal{A}) = \mathcal{A}$...

(b) $\pi = (179)(2364)(58)$, $\pi^{-1} = (971)(4632)(58)$, $|\pi| = \text{lcm}(3,4,2) = 12$, $\pi^{12} = \text{id}$, $\pi^{2017} = \pi$, $\pi^{-2}\pi^4 = \pi^2 = (17)(19)(26)(34)$.

2. Določi vse elemente reda 9 v grupi $\mathbb{Z}_{108}$. Za vse podgrupe reda 9 v grupi $\mathbb{Z}_{108}$ napiši vse njihove generatorje.

Re.

Uporabi izrek: Za vsak pozitiven delitelj k števila n, je množica $\langle n/k \rangle$ podgrupa grupe $\mathbb{Z}_n$ reda k. Poleg tega, te podgrupe so edine podgrupe grupe $\mathbb{Z}_n$;
ali izrek za število elementov reda d v ciklični grupi: Če je d pozitivno celo število ki deli n, potem je število elementov reda d v ciklični grupi reda n eneko $\phi(d)$;
ali fundamentalni izrek za ciklične grupe...
$|12| = |24| = |48| = |60| = |84| = |96| = 9$.

3. (a) Dana je grupa $G = \{1, 8, 12, 14, 18, 21, 27, 31, 34, 38, 44, 47, 51, 53, 57, 64\}$ za operacijo množenja po modulu 65, in naj bo $H = \langle 12 \rangle$ podgrupa grupe G. Napiši Cayley-evo tabelo za G/H.

(b) Določi red elementa $8\langle 16 \rangle$ v grupi $U(105)/\langle 16 \rangle$.

Re.

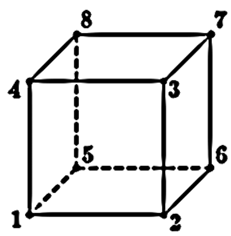
(a)

$\cdot$	H	$8H$	$18H$	$27H$
H	H	$8H$	$18H$	$27H$
$8H$	$8H$	$27H$	H	$18H$
$18H$	$18H$	H	$27H$	$8H$
$27H$	$27H$	$18H$	$8H$	H

(b) $|8\langle 16 \rangle| = 4$.

4. Naj bo $\mathcal{O}$ grupa vseh simetrij kocke (rotacija, zrcaljenje, drsno zrcaljenje,...). Grupa $\mathcal{O}$ deluje na množici $\{v_1, v_2, ..., v_8\}$ ogljišč kocke. Določi stabilizator ogljišča v_1 v grupi $\mathcal{O}$. Uporabi orbita-stabilizator izrek in dokaži, da je $|\mathcal{O}| = 48$.

Re.



Če so $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ogljišč kocke potem

$$\mathcal{O}_1 = \{(1), (254)(368), (245)(386), (25)(38), (36)(45), (24)(68)\}.$$

Če so $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ogljišč kocke potem
$|\mathcal{O}| = |\mathcal{O}v_1| \cdot |\mathcal{O}_{v_1}| = 8|\mathcal{O}_{v_1}|$,
$|\mathcal{O}_{v_1}| = |\mathcal{O}_{v_1}v_2| \cdot |\mathcal{O}_{v_1v_2}| = 3|\mathcal{O}_{v_1v_2}|$,
$|\mathcal{O}_{v_1v_2}| = |\mathcal{O}_{v_1v_2}v_4| \cdot |\mathcal{O}_{v_1v_2v_4}| = 2|\mathcal{O}_{v_1v_2v_4}|$,...

Več na `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`